ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2002
Sessione ordinaria

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva k di equazione $y = f(x)$, dove è:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^3 + 2}.$$

a) Determinare per quali valori di x essa è situata nel semipiano $y > 0$ e per quali nel semipiano $y < 0$.

b) Trovare l'equazione della parabola passante per l'origine O degli assi e avente l'asse di simmetria parallelo all'asse y, sapendo che essa incide ortogonalmente la curva k nel punto di ascissa -1 (*N.B.: si dice che una curva incide ortogonalmente un'altra in un punto se le rette tangenti alle due curve in quel punto sono perpendicolari*).

c) Stabilire se la retta tangente alla curva k nel punto di ascissa -1 ha in comune con k altri punti oltre a quello di tangenza.

d) Determinare in quanti punti la curva k ha per tangente una retta parallela all'asse x.

e) Enunciare il teorema di Lagrange e dire se sono soddisfatte le condizioni perché esso si possa applicare alla funzione $f(x)$ assegnata, relativamente all'intervallo $-\sqrt{2} \le x \le 0$.

PROBLEMA 1

a) Si discute la positività della funzione: si ha $\frac{x^2+2}{x^3+2}>0$ per $x>-\sqrt[3]{2}$, $\frac{x^2+2}{x^3+2}<0$ per $x<-\sqrt[3]{2}$. Pertanto il grafico è situato nel semipiano $y>0$ per $x>-\sqrt[3]{2}$ e nel semipiano $y<0$ per $x<-\sqrt[3]{2}$.

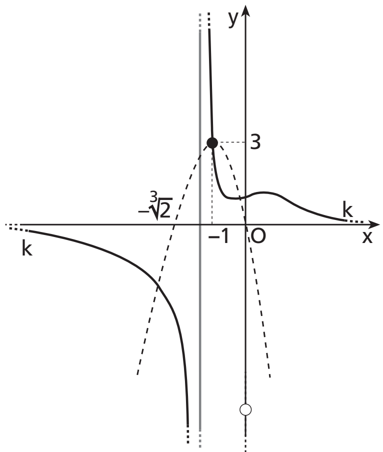
b) Il punto della curva k di ascissa -1 ha ordinata $f(-1)=3$ e quindi coordinate $(-1;3)$.
La parabola richiesta ha equazione $y=ax^2+bx$. Il passaggio per $(-1;3)$ implica che $a-b=3$ e quindi l'equazione diventa $y=ax^2+(a-3)x$. Il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola è dato da $y'=2ax+a-3$ e nel punto di ascissa -1 vale $m=-a-3$.
Il coefficiente angolare m' della retta tangente alla curva k nel punto $x=-1$ è uguale a $f'(-1)$. Poiché $f'(x)=\frac{-x(x^3+6x-4)}{(x^3+2)^2}$, $m'=f'(-1)=-11$. Imponendo la condizione di perpendicolarità tra le due tangenti, $m\cdot m'=-1$, si trova $-11(-a-3)=-1\rightarrow a=-\frac{34}{11}$.
L'equazione della parabola cercata è: $y=-\frac{34}{11}x^2-\frac{67}{11}x$.

c) Per le considerazioni al punto b, la retta passante per $(-1;\,3)$ e tangente alla curva k ha equazione:
$y-3=-11(x+1)\rightarrow y=-11x-8$. Le intersezioni tra tale retta e la curva si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y=-11x-8 \\ y=\dfrac{x^2+2}{x^3+2} \end{cases}$$

. L'equazione risolvente è

$11x^4+8x^3+x^2+22x+18=0$. Poiché $x=-1$ è un punto di tangenza, il polinomio sarà divisibile due volte per il binomio $(x+1)$. Applicando la regola di Ruffini, esso si scompone nel modo seguente: $(x+1)^2(11x^2-14x+18)$.



▲ **Figura 1.**

Il discriminante di $11x^2-14x+18$ vale: $\frac{\Delta}{4}=49-198<0$; pertanto non esistono soluzioni reali del polinomio diverse da $x=-1$.
Se ne conclude che la retta tangente interseca la curva k solo nel punto $(-1;3)$.

d) Si tratta di determinare i punti stazionari della funzione f, dove, cioè, la derivata prima si annulla. Nel punto *b)* si era calcolato $f'(x)=\frac{-x(x^3+6x-4)}{(x^3+2)^2}$. Pertanto si hanno punti stazionari per $x=0$ e nelle eventuali soluzioni dell'equazione $x^3+6x-4=0$. Poiché quest'ultima non è risolvibile per via elementare, si consideri la funzione $g(x)=x^3+6x-4$. Essa è continua e assume in R sia valori positivi che negativi. Per il teorema dell'esistenza degli zeri, ammette almeno uno zero e, essendo la derivata prima $g'(x)=x^2+6$ di segno costante, per non andare contro il teorema di Rolle, esisterà un solo zero.
In conclusione, i punti in cui la curva k ha tangente parallela all'asse x sono due, $x=0$ e l'unica radice dell'equazione $x^3+6x-4=0$.

e) Il teorema di Lagrange afferma che se una funzione $f(x)$ è continua in un intervallo chiuso $[a;b]$ ed è derivabile in ogni punto interno a esso, allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo tale che: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.
Essendo la funzione $f(x)=\frac{x^2+2}{x^3+2}$ non definita nel punto $x=-\sqrt[3]{2}$ e $-\sqrt{2}<-\sqrt[3]{2}<0$, essa non è quindi continua nell'intervallo $[-\sqrt{2};\,0]$. Di conseguenza il teorema di Lagrange non è applicabile.