ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione suppletiva

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva K di equazione:

$$y = \frac{2x(6-x)}{2+x}. \tag{1}$$

a) Disegnarne l'andamento, indicando con A il suo punto di massimo relativo.

b) Calcolare quanti punti, aventi le coordinate del tipo $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, dove a, b sono numeri interi, appartengono alla regione piana (contorno compreso) delimitata dall'asse x e dalla curva K.

c) Fra i triangoli isosceli aventi il vertice propriamente detto in A e la base sull'asse x, determinare quello il cui perimetro è 16.

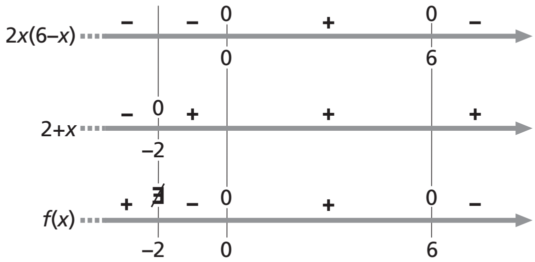
d) Calcolare le aree delle due regioni in cui la curva K divide il triangolo trovato sopra.

e) Spiegare perché la funzione (1) non è invertibile nel suo dominio. Se si restringe convenientemente questo dominio si ottiene una funzione invertibile? Qual è in tal caso la funzione inversa?

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione suppletiva

PROBLEMA 1

a) Il campo di esistenza della funzione $f(x) = \dfrac{2x(6-x)}{2+x}$ è l'intervallo $]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$ e si ottiene imponendo che il denominatore di f non sia nullo. Lo schema di figura 1 mostra il segno di f: la funzione si annulla in $x = 0$ e in $x = 6$, è positiva per $x < -2$ e per $0 < x < 6$, negativa per $-2 < x < 0$ e per $x > 6$.



▲ **Figura 1.**

Calcoliamo i limiti. Si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} f = +\infty, \ \lim_{x\to+\infty} f = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-2^+} f = -\infty, \ \lim_{x\to-2^-} f = +\infty.$$

Quindi la retta $x = -2$ è asintoto verticale.
Cerchiamo eventuali asintoti obliqui di equazione $y = mx + q$, con $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ e $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx]$.
Si ha:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2(6-x)}{2+x} = -2$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x(6-x)}{2+x} + 2x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{16x}{2+x} = 16.$$

La retta $y = -2x + 16$ è asintoto obliquo di f.

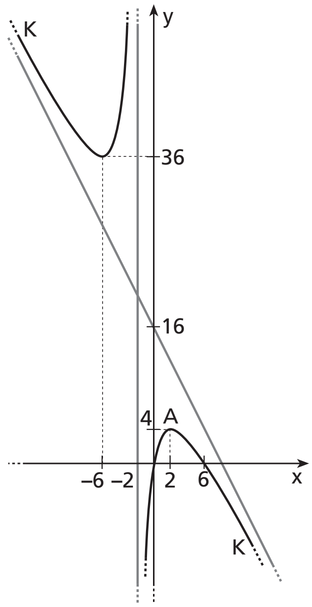
La derivata prima $f'(x) = \dfrac{(12-4x)(2+x) - 12x + 2x^2}{(2+x)^2} = \dfrac{-2(x^2+4x-12)}{(2+x)^2}$ ha campo di esistenza uguale a quello di f e si annulla per $x = -6$ e $x = 2$. Essendo il denominatore sempre positivo, il segno di f' è concorde con il segno del numeratore. Si ha:

per $-6 < x < 2$, $f'(x) > 0$ e la funzione f è crescente;
per $x < -6$ e $x > 2$, $f'(x) < 0$ la funzione f è decrescente.

Quindi $x = -6$ è punto di minimo relativo e $x = 2$ è punto di massimo relativo. I corrispondenti valori di f sono $f(-6) = 36$ e $f(2) = 4$. Le coordinate del punto A sono dunque $A(2, 4)$.

La derivata seconda $f''(x) = \dfrac{-64}{(x+2)^3}$ non si annulla in nessun punto del suo campo di esistenza, è positiva per $x < -2$, negativa per $x > -2$. Si conclude che la funzione f non ha flessi, ha concavità rivolta verso l'alto per $x < -2$ e concavità rivolta verso il basso per $x > -2$.

Il grafico riportato in figura 2 mostra che la curva K è un'iperbole non equilatera di asintoti $x=-2$ e $y=-2x+16$.



▶ **Figura 2.**

b) La domanda richiede un conteggio diretto dei punti. Dalle ipotesi $0\leq\frac{a}{2}\leq 6$ e $0\leq\frac{b}{2}\leq f(x)$ (a e b numeri interi) si ricava: $0\leq a\leq 12$ e $0\leq b\leq 2f(x)$. Quindi i possibili valori che le ascisse dei punti possono assumere sono 13 e sono: $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots\ldots, \frac{11}{2}, 6$. Fissato $x=\frac{a}{2}$, i punti da conteggiare lungo la verticale per x sono tutti i punti $\left(\frac{a}{2}, b\right)$ che soddisfano la condizione $0\leq b\leq 2f\left(\frac{a}{2}\right)$; essi sono $1+\mathrm{int}\left(2f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$, dove il simbolo int indica la funzione parte intera. Ricordiamo che dato z numero reale, int(z) è il più grande numero intero minore o uguale a z. Memorizziamo i punti di ciascuna linea verticale nella seguente tabella.

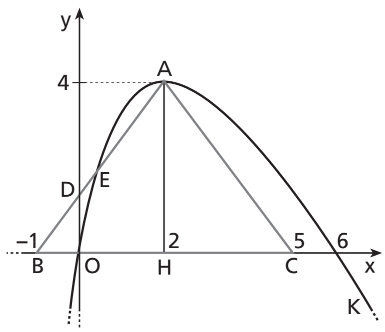
x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$2f(x)$	0	4,4	6,6	7,7	8	7,7	7,2	6,3	5,3	4,1	2,8	1,4	0
$1+\mathrm{int}\left(2f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$	1	5	7	8	9	8	8	7	6	5	3	2	1

Il numero di punti totale è quindi $\sum_{a=0}^{12} 1+\mathrm{int}\left(2f\left(\frac{a}{2}\right)\right)=70$.

c) Indichiamo con $B(b; 0)$ il vertice a sinistra di $A(2; 4)$, con $C(c; 0)$ il vertice a destra di A e con $H(2; 0)$ il piede dell'altezza relativa alla base BC (vedi figura 3). Per le ipotesi sul triangolo ABC:

$$\overline{BH}=\overline{HC}\rightarrow c=4-b$$

e quindi il punto C ha coordinate $C(4-b; 0)$. Sostituendo le coordinate dei punti A e B nella relazione $\overline{AB}+\overline{BH}=8$ si ottiene: $\sqrt{(b-2)^2+16}+\sqrt{(b-2)^2}=8$. Essendo $b<2$ per ipotesi, si ha $|b-2|=2-b$; quindi $\sqrt{(b-2)^2+16}=6+b$ che ha senso per $b>-6$. D'altronde se fosse $b<-6$, la base BC del triangolo avrebbe lunghezza superiore a 16 e quindi il perimetro non potrebbe essere 16. Possiamo elevare al quadrato ambo i membri della relazione $\sqrt{(b-2)^2+16}=6+b$ e risolvendo si ottiene $b=-1$. Quindi $c=5$ e il triangolo richiesto ha vertici $A(2; 4)$, $B(-1; 0)$, $C(5; 0)$.



▲ **Figura 3.**

d) Si osserva dalla figura 3 che la regione del triangolo ABC a sinistra della curva K è formata dall'unione del triangolo BOD, la cui area è $\frac{1}{2}\overline{OB}\cdot\overline{OD}$, con la figura di vertici ODE, la cui area richiede il calcolo di un integrale. In sintesi: $A_{BOE}=A_{OBD}+A_{ODE}$.

Calcoliamo le coordinate di D ed E. La retta per A e B ha equazione $y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$, quindi si ha $D\left(0;\frac{4}{3}\right)$ e $A_{OBD}=\frac{1}{2}\overline{OB}\cdot\overline{OD}=\frac{2}{3}$. Le coordinate di E si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y=\dfrac{-2x^2+12x}{2+x} \\ y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

da cui si ottiene l'equazione risolvente $5x^2-12x+4=0$ che ha due soluzioni, $x=2$ e $x=\frac{2}{5}$. Quindi $x=\frac{2}{5}$ è l'ascissa di E, essendo $x=2$ l'ascissa del punto A già noto.

L'area della figura di vertici ODE è:

$$\int_0^{\frac{2}{5}}\left(\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}-f(x)\right)dx=\int_0^{\frac{2}{5}}\left(\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}-\frac{-2x^2+12x}{2+x}\right)dx.$$

Poiché $\frac{-2x^2+12x}{2+x}=-2x+16-\frac{32}{2+x}$, si ha:

$$\int_0^{\frac{2}{5}}\left(\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}-\frac{-2x^2+12x}{2+x}\right)dx=\int_0^{\frac{2}{5}}\left(\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}+2x-16+\frac{32}{2+x}\right)dx=$$

$$\int_0^{\frac{2}{5}}\left(\frac{10}{3}x-\frac{44}{3}+\frac{32}{2+x}\right)dx=\left[\frac{5}{3}x^2-\frac{44}{3}x+32\ln|x+2|\right]_0^{\frac{2}{5}}=32\ln\frac{6}{5}-\frac{28}{5}.$$

Quindi $A_{BOE}=A_{OBD}+A_{ODE}=\frac{2}{3}+32\ln\frac{6}{5}-\frac{28}{5}=32\ln\frac{6}{5}-\frac{74}{15}$.

Infine l'area della parte di triangolo a destra della curva K si calcola come differenza:

$$A_{OEAC}=A_{ABC}-A_{BOE}=12-32\ln\frac{6}{5}+\frac{74}{15}=\frac{254}{15}-32\ln\frac{6}{5}.$$

e) Una funzione $f\colon A\rightarrow B$ è invertibile se e solo se è iniettiva e suriettiva. Se f è iniettiva ma non suriettiva, è sufficiente sostituire B con il codominio di f per ottenere una funzione invertibile, se f è suriettiva ma non iniettiva, per ottenere una funzione invertibile, si deve restringere il dominio di f ad un sottoinsieme di A in cui f sia iniettiva.

La funzione (1) $f(x)=\frac{2x(6-x)}{2+x}$ non è invertibile perché non è iniettiva: come dimostrato nel punto a), $f(0)=f(6)=0$. Osservando la figura 2 si può infatti notare che esistono infinite rette parallele all'asse x che intersecano il grafico di f in 2 punti. Restringiamo il dominio di f $]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$ ad un sottoinsieme in cui f sia iniettiva. Sempre osservando la figura 2 si individuano almeno quattro sottoinsiemi in cui f è iniettiva: $D_1=]-\infty,-6]\cup]-2,+2]$, $D_2]-\infty,-6]\cup[+2,+\infty[$, $D_3=[-6,-2[\cup]-2,+2]$, $D_4=[-6,-2[\cup[+2,+\infty[$. Altri sottoinsiemi si ottengono restringendo ulteriormente ciascuno dei sottoinsiemi individuati.

L'espressione dell'inversa di f si ottiene ricavando x dalla relazione $y=\frac{2x(6-x)}{2+x}$. Si ha:

$$x=\frac{12-y\pm\sqrt{y^2-40y+144}}{4}\Leftrightarrow x=3-\frac{1}{4}y\pm\frac{1}{4}\sqrt{y^2-40y+144}.$$

Il segno $\pm$ conferma la non invertibilità della funzione f sul suo campo di esistenza. Affinché la radice sia definita deve essere $y^2-40y+144\geq 0$ che è soddisfatta per $y\in]-\infty,+4]\cup[36,+\infty[$; abbiamo così ritrovato il codominio di f.

La parte dell'espressione di x che non dipende dal segno del radicale è $x = 3 - \frac{1}{4}y$ che, come si osserva in figura 4, è l'equazione della retta che passa dai punti di massimo e minimo relativi di f.

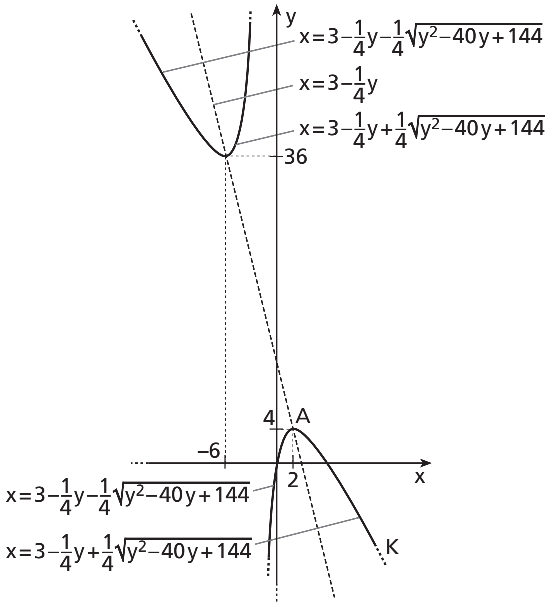
Quindi $x = 3 - \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}\sqrt{y^2 - 40y + 144}$ rappresenta la parte di grafico della curva K situata a sinistra della retta $x = 3 - \frac{1}{4}y$, mentre

$x = 3 - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}\sqrt{y^2 - 40y + 144}$ rappresenta la parte di grafico della curva K situata a destra della retta $x = 3 - \frac{1}{4}y$.

Allora, ad esempio, la funzione

$$g :]-\infty, +4] \cup [36, +\infty[\mapsto]-\infty, -6] \cup]-2, +2]$$

tale che $g(y) = 3 - \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}\sqrt{y^2 - 40y + 144}$ è l'inversa della funzione (1) ristretta al dominio D_1. Procedendo in modo analogo si possono costruire altre funzioni inverse della funzione data (1).



▲ **Figura 4.**