

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO DI ORDINAMENTO • 2010

PROBLEMA 1

Sia $ABCD$ un quadrato di lato 1, P un punto di AB e γ la circonferenza di centro P e raggio AP . Si prenda sul lato BC un punto Q in modo che sia il centro di una circonferenza λ passante per C e tangente esternamente a γ .

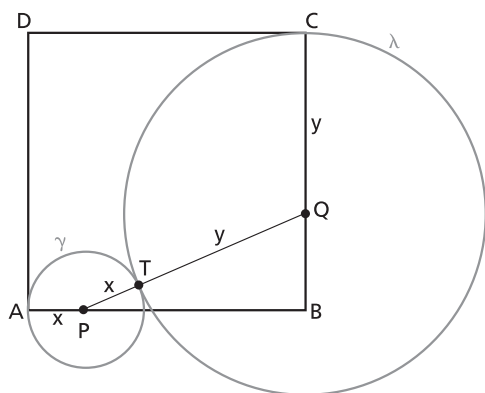
1. Se $AP = x$, si provi che il raggio di λ in funzione di x è dato da $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.
2. Riferito il piano a un sistema di coordinate Oxy , si tracci, indipendentemente dalle limitazioni poste a x dal problema geometrico, il grafico di $f(x)$. La funzione $f(x)$ è invertibile? Se sì, qual è il grafico della sua inversa?
3. Sia $g(x) = \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$, $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, qual è l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto $R(0; 1)$? E nel punto $S(1; 0)$? Cosa si può dire della tangente al grafico di $g(x)$ nel punto S ?
4. Si calcoli l'area del triangolo mistilineo ROS , ove l'arco RS appartiene al grafico di $f(x)$ o, indifferentemente, di $g(x)$.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO • 2010

PROBLEMA 1

1. In figura 1 sono rappresentati il quadrato $ABCD$ e le circonferenze γ e λ . Posto T il punto di tangenza tra le circonferenze e indicati con x e y i rispettivi raggi, risulta:

$$\begin{aligned} \overline{AP} = \overline{PT} = x, \quad \overline{PB} = 1 - x, \quad \text{con } 0 < x < 1, \\ \overline{CQ} = \overline{QT} = y, \quad \overline{BQ} = 1 - y, \quad \text{con } 0 < y < 1. \end{aligned}$$



◀ Figura 1.

Per ricavare y in funzione di x , applichiamo al triangolo rettangolo PBQ il teorema di Pitagora:

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= \overline{PB}^2 + \overline{BQ}^2 \rightarrow (x+y)^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2 \rightarrow \\ x^2 + y^2 + 2xy &= 1 + x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y \rightarrow 2y(x+1) = 2(-x+1) \rightarrow \\ y &= \frac{1-x}{1+x} \rightarrow f(x) = \frac{1-x}{1+x}. \end{aligned}$$

2. La funzione $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ è una funzione omo-

grafica definita per $x \neq -1$, di asintoti $x = -1$ e $y = -1$, di centro di simmetria $(-1; -1)$; le intersezioni con gli assi sono i punti $(0; 1)$ e $(1; 0)$, il suo grafico è simmetrico rispetto alla bisettrice del I e III quadrante (figura 2).

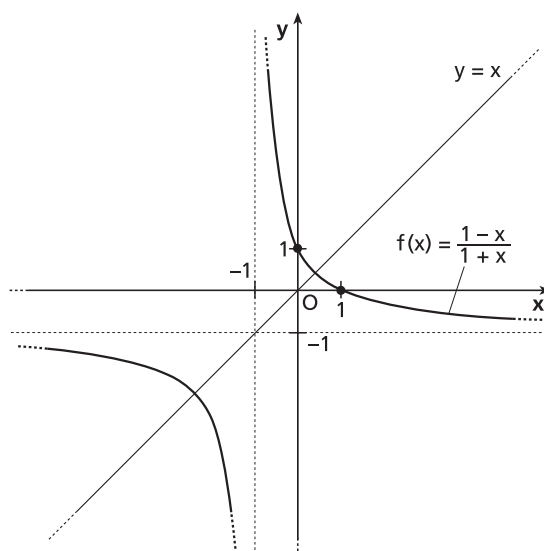
La funzione $f(x)$ è una funzione invertibile perché suriettiva per $y \neq -1$ e iniettiva nel suo dominio. Ricaviamo x in funzione di y :

$$y = \frac{1-x}{1+x} \rightarrow y + xy = 1 - x \rightarrow$$

$$x(y+1) = 1-y \rightarrow x = \frac{1-y}{y+1},$$

scambiamo la x con la y :

$$y = \frac{1-x}{1+x},$$



▲ Figura 2.

pertanto $f^{-1}(x) = f(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Il grafico della funzione inversa $f^{-1}(x)$ coincide con quello di $f(x)$, come si poteva prevedere dalla simmetria del grafico di f rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

3. Poiché $g(x) = |f(x)|$, osservando il grafico di $f(x)$ in figura 2 possiamo scrivere l'espressione analitica di $g(x)$ e rappresentare il suo grafico (figura 3):

$$g(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{1-x}{1+x}, & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ -f(x) = -\frac{1-x}{1+x}, & \text{se } x < -1 \vee x > 1 \end{cases}$$

In generale l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $g(x)$ in un generico punto $(x_0; y_0)$, se esiste e non è parallela all'asse y , ha equazione:

$$y - y_0 = g'(x_0)(x - x_0).$$

Calcoliamo la funzione derivata prima:

$$g'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{(1+x)^2}, & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ \frac{2}{(1+x)^2}, & \text{se } x < -1 \vee x > 1 \end{cases}$$

Nel punto $x_R = 0$, risulta $g'(0) = -2$ e la retta tangente al grafico nel punto $R(0; 1)$ ha equazione:

$$y - 1 = -2(x - 0) \rightarrow y = -2x + 1.$$

Nel punto $x_S = 1$ è necessario calcolare la derivata sinistra e destra:

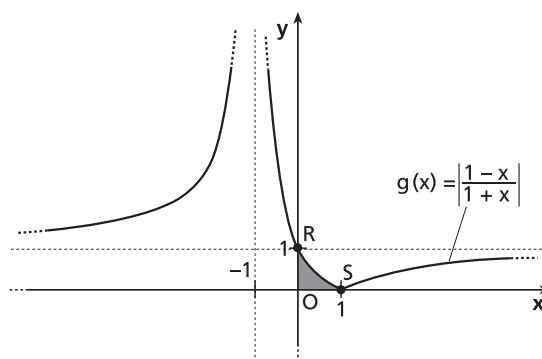
$$g'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[-\frac{2}{(1+x)^2} \right] = -\frac{1}{2}, \quad g'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{2}{(1+x)^2} \right] = \frac{1}{2}.$$

Poiché per $x_S = 1$, i valori della derivata sinistra e destra sono diversi, la funzione $g(x)$ non è derivabile in tale punto e non esiste una retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto $S(1; 0)$, ma esistono la tangente destra e sinistra e S è un punto angoloso.

4. Osserviamo il triangolo mistilineo ROS evidenziato in figura 3.

La sua area corrisponde al valore del seguente integrale:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^1 \frac{1-x}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{1-(1+x)+2}{1+x} dx = \int_0^1 \left(-1 + \frac{2}{1+x} \right) dx = \\ &= -[x]_0^1 + 2[\ln(1+x)]_0^1 = -1 + 0 + 2(\ln 2 - \ln 1) = -1 + 2\ln 2 = \ln 4 - 1. \end{aligned}$$



▲ Figura 3.