PROBLEMA 2

Sia $f(x) = a2^x + b2^{-x} + c$ con a, b, c numeri reali. Si determinino a, b, c in modo che:

1. la funzione f sia pari;
2. $f(0) = 2$;
3. $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{3}{2\ln 2}$.

Si studi la funzione g ottenuta sostituendo ad a, b, c i valori così determinati e se ne disegni il grafico G.
Si consideri la retta r di equazione $y = 4$ e si determinino, approssimativamente, le ascisse dei punti in cui essa interseca G, mettendo in atto un procedimento iterativo a scelta.
Si calcoli l'area della regione finita del piano racchiusa tra r e G.
Si calcoli $\int \frac{1}{g(x)}\,dx$.
Si determini la funzione g' il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta r.

PROBLEMA 2

1. Se la funzione è pari, allora
$$f(x)=f(-x)\Rightarrow a2^x+b2^{-x}+c=a2^{-x}+b2^x+c\Rightarrow a(2^x-2^{-x})=b(2^x-2^{-x})\Rightarrow a=b.$$

2. $f(0)=2\Rightarrow a+b+c=2.$

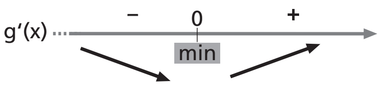
3. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{3}{2\ln 2}\Rightarrow\int_0^1(a2^x+b2^{-x}+c)\,dx=\left[a\cdot\frac{2^x}{\ln 2}-b\cdot\frac{2^{-x}}{\ln 2}+cx\right]_0^1=\frac{2a+b}{2\ln 2}+c=\frac{3}{2\ln 2}.$

Le tre condizioni costituiscono il sistema $\begin{cases}a=b\\a+b+c=2\\\dfrac{2a+b}{2\ln 2}+c=\dfrac{3}{2\ln 2}\end{cases}$ con soluzioni $\begin{cases}a=1\\b=1\\c=0\end{cases}$, quindi la funzione cercata è $g(x)=2^x+2^{-x}=2^x+\dfrac{1}{2^x}=\dfrac{2^{2x}+1}{2^x}$.

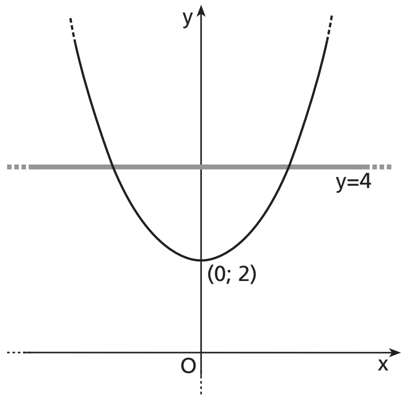
Studiamo la funzione $g(x)$.
È definita positiva su tutto $\mathbb{R}$; la funzione è pari, quindi simmetrica rispetto all'asse delle y.
Il grafico interseca l'asse delle y nel punto $(0;\,2)$, non interseca l'asse delle x.
$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=+\infty$, il grafico non presenta asintoti orizzontali.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+2^{-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2^x-2^{-x})\cdot\ln 2}{1}=+\infty$, il grafico non presenta asintoti obliqui.

$g'(x)=(2^x-2^{-x})\cdot\ln 2>0$, se $x>0$. Il punto $(0;2)$ è un punto di minimo (figura 5).



◀ **Figura 5.**



▲ **Figura 6.**

$g''(x)=(2^x+2^{-x})\cdot\log^2 2>0,\ \forall x$. Non ci sono flessi, la concavità è sempre rivolta verso l'alto. Il grafico è rappresentato in figura 6.

x_1	x_2	$h(x_1)$	$h(x_2)$	α
1	2	−3	1	1,5
1,5	2	−2,31…	1	1,75
1,75	2	−1,14…	1	1,875
1,875	2	−0,22…	1	1,9375
1,875	1,9375	−0,22…	0,35…	…

Determiniamo le intersezioni tra la retta $y = 4$ e $y = g(x)$:

$$\begin{cases} y = 2^x + 2^{-x} \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x + 2^{-x} - 4 = 0 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1 = 0 \\ y = 4 \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di bisezione alla funzione $h(x) = 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1$:
Si arriva infine al valore $\alpha = 1{,}89997$.
$2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1 = 0 \Rightarrow 2^x = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow x = \log_2(2 \pm \sqrt{3})$, valori simmetrici rispetto all'asse delle ordinate.
Il valore dell'area richiesta è data dall'integrale:

$$2 \int_0^{\log_2(2+\sqrt{3})} (4 - 2^x - 2^{-x})\, dx = 2\left[4x - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2^{-x}}{\ln 2}\right]_0^{\log_2(2+\sqrt{3})} = 8\log_2(2+\sqrt{3}) - \left(\frac{4\sqrt{3}}{\ln 2}\right) \cong 5{,}2044$$

$\displaystyle\int \frac{1}{g(x)}\, dx = \int \frac{2^x}{1 + 2^{2x}}\, dx$, posto $t = 2^x$ e $dt = (2^x \ln 2)\, dx$, segue:

$$\frac{1}{\ln 2} \int \frac{t}{1 + t^2}\, dt = \frac{1}{\ln 2} \cdot \operatorname{arctg}(2^x) + c.$$

Le equazioni della simmetria assiale, con asse la retta $y = 4$ sono:

$\begin{cases} x' = x \\ y' = 8 - y \end{cases}$, dunque $y' = g'(x) = 8 - 2^x - 2^{-x}$.