PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali da:

$$f(x) = (ax + b)e^{-\frac{x}{3}} + 3,$$

dove a e b sono due numeri reali che si chiede di determinare sapendo che f ammette un massimo nel punto d'ascissa 4 e che $f(0) = 2$.

1. Si provi che $a = 1$ e $b = -1$.
2. Si studi su $\mathbb{R}$ la funzione $f(x) = (x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$, e se ne tracci il grafico Γ nel sistema di riferimento Oxy.
3. Si calcoli l'area della regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ, dall'asse y e dalla retta $y = 3$.
4. Il profitto di un'azienda, in milioni di euro, è stato rappresentato nella tabella sottostante designando con x_i l'anno di osservazione e con y_i il corrispondente profitto.

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65

Si cerca una funzione che spieghi il fenomeno dell'andamento del profitto giudicando accettabile la funzione g definita su $\mathbb{R}^+$ se per ciascun x_i, oggetto dell'osservazione, si ha: $|g(x_i) - y_i| \leq 10^{-1}$. Si verifichi, con l'aiuto di una calcolatrice, che è accettabile la funzione f del punto 2 e si dica, giustificando la risposta, se è vero che, in tal caso, l'evoluzione del fenomeno non potrà portare a profitti inferiori ai 3 milioni di euro.

PROBLEMA 2

1. Data la funzione $f(x) = (ax + b)e^{-\frac{x}{3}} + 3$ definita in $\mathbb{R}$, imponiamo $f(0) = 2$:

$$b + 3 = 2 \quad \rightarrow \quad b = -1,$$

pertanto $f(x) = (ax - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$.

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = ae^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}(ax - 1) \quad \rightarrow \quad f'(x) = e^{-\frac{x}{3}}\left(a - \frac{1}{3}ax + \frac{1}{3}\right).$$

Condizione necessaria affinché nel punto $x = 4$ vi sia un estremante è che $f'(4) = 0$:

$$f'(4) = 0 \quad \rightarrow \quad e^{-\frac{4}{3}}\left(a - \frac{4}{3}a + \frac{1}{3}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad a = 1.$$

Assunto $f(x) = (x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$, essa ammette in $x = 4$ un massimo se $f''(4) < 0$. Verifichiamolo calcolando la derivata seconda:

$$f'(x) = \frac{e^{-\frac{x}{3}}}{3}(-x + 4), \qquad f''(x) = -\frac{e^{-\frac{x}{3}}}{9}(-x + 7),$$

$$f''(4) = -\frac{e^{-\frac{4}{3}}}{9}(-4 + 7) = -\frac{e^{-\frac{4}{3}}}{3} < 0;$$

pertanto la funzione ammette massimo per $x = 4$.

2. Studiamo la funzione $f(x) = (x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$ per tracciare il corrispondente grafico Γ.
Essa ha dominio $\mathbb{R}$ e non presenta simmetrie. Come è noto dal punto 1 del problema, interseca l'asse delle ordinate nel punto (0; 2). Per trovare le intersezioni con l'asse x sarebbe necessario risolvere l'equazione $(x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3 = 0$ ma questa non è risolubile per via analitica. Per lo stesso motivo non si può affrontare il problema del segno della funzione.
Valutiamo il comportamento della funzione agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to +\infty}\left[(x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3\right] =$$

si tratta di una forma indeterminata del tipo $+\infty \cdot 0$, eliminabile applicando il teorema di De l'Hospital:

$$\lim_{x \to +\infty}\left[(x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3\right] = 3 + \lim_{x \to +\infty}\frac{x - 1}{e^{\frac{x}{3}}} = 3 + \lim_{x \to +\infty}\frac{3}{e^{\frac{x}{3}}} = 3.$$

Pertanto la funzione ha asintoto orizzontale $y = 3$ per $x \rightarrow +\infty$.

Per $x \rightarrow -\infty$ risulta:

$$\lim_{x \to -\infty}\left[(x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3\right] = -\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty}\frac{(x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3}{x} = \lim_{x \to -\infty}\left[\left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{-\frac{x}{3}} + \frac{3}{x}\right] = +\infty,$$

allora la funzione non ha asintoto né orizzontale né obliquo sinistro.

Dal punto 1 è nota la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{e^{-\frac{x}{3}}}{3}(-x+4),$$

con:

$f'(x) > 0$ per $x < 4$, funzione crescente,
$f'(x) = 0$ per $x = 4$, punto stazionario,
$f'(x) < 0$ per $x > 4$, funzione decrescente.

Il punto $x = 4$ è pertanto l'unico estremante della funzione con coordinate $M\left(4; 3e^{-\frac{4}{3}} + 3\right)$.

Ricordiamo la derivata seconda, valutiamo il suo segno e la concavità:

$$f''(x) = -\frac{e^{-\frac{x}{3}}}{9}(-x+7),$$

$f''(x) > 0$ per $x > 7$, concavità verso l'alto,
$f''(x) = 0$ per $x = 7$, punto di flesso,
$f''(x) < 0$ per $x < 7$, concavità verso il basso.

Il grafico Γ ha flesso nel punto $F\left(7; 6e^{-\frac{7}{3}} + 3\right)$; in figura 8 ne è rappresentato il suo andamento.

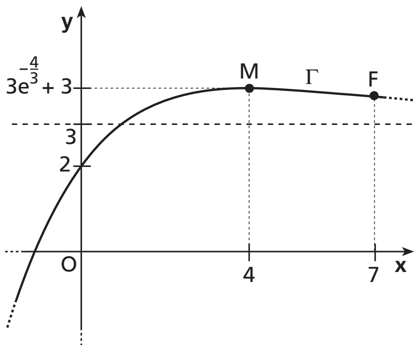

Figura 8.

3. Evidenziamo la regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ, dall'asse y e dalla retta $y = 3$ e determiniamo le coordinate del punto intersezione A (figura 9):

$$\begin{cases} y = (x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3 \\ y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3 = 3 \\ y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-1)e^{-\frac{x}{3}} = 0 \\ y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \rightarrow A(1; 3)$$

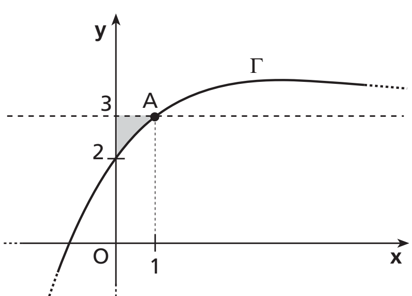

Figura 9.

La superficie della zona evidenziata si calcola secondo l'integrale:

$$S=\int_0^1[3-f(x)]dx=\int_0^1\left[3-(x-1)e^{-\frac{x}{3}}-3\right]dx=-\int_0^1(x-1)e^{-\frac{x}{3}}dx=-\int_0^1 xe^{-\frac{x}{3}}dx+\left[-3e^{-\frac{x}{3}}\right]_0^1=$$

calcoliamo l'integrale dell'ultimo membro per parti:

$$=-\left[-3xe^{-\frac{x}{3}}\right]_0^1-3\int_0^1 e^{-\frac{x}{3}}dx-3e^{-\frac{1}{3}}+3=3e^{-\frac{1}{3}}+9\left[e^{-\frac{x}{3}}\right]_0^1-3e^{-\frac{1}{3}}+3=9e^{-\frac{1}{3}}-6.$$

Pertanto la superficie della regione vale $S=9e^{-\frac{1}{3}}-6$.

4. Verifichiamo se la funzione $f(x)$ del punto 2 del problema, per $x>0$ soddisfa la condizione richiesta, ovvero $|f(x_i)-y_i|\leq 10^{-1}$. Completiamo la tabella di partenza calcolando per ogni anno $f(x_i)$ e $|f(x_i)-y_i|$ (arrotondando alla terza cifra decimale).

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65
$f(x_i)$	2	3	3,513	3,736	3,791	3,756	3,677
$\lvert f(x_i)-y_i\rvert$	0,030	0,020	0,023	0,026	0,009	0,004	0,027

Osservando i valori dell'ultima riga della tabella, la funzione $f(x)$ soddisfa la condizione richiesta e possiamo quindi assumerla come accettabile.
Nondimeno, benché $f(x)>3$ per $x>1$, non possiamo sostenere che l'evoluzione del fenomeno non potrà portare a profitti inferiori ai 3 milioni di euro. Infatti, considerando per esempio l'anno 2020, ovvero per $x=16$, si calcola:

$$f(16)=15e^{-\frac{16}{3}}+3\simeq 3{,}072.$$

Assunta valida la condizione $|f(x_i)-y_i|\leq 10^{-1}$, si ricava:

$$|f(16)-y_{16}|\leq 10^{-1}\ \rightarrow\ f(16)-10^{-1}\leq y_{16}\leq f(16)+10^{-1}\ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 3{,}072-0{,}1\leq y_{16}\leq 3{,}072+0{,}1\ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 2{,}972\leq y_{16}\leq 3{,}172.$$

Pertanto non abbiamo la certezza che y_{16} sia non inferiore a 3 e che quindi il profitto sia non inferiore ai 3 milioni di euro.