# ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
# CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
## Sessione suppletiva

### PROBLEMA 2

È assegnata la funzione $f_a(x) = \dfrac{a}{1 + x^2}$, dove $a$ è un parametro reale non nullo.

1) Dopo aver fornito la definizione di funzione limitata, spiegare perché la funzione $f_a(x)$ è limitata.
2) Una volta riferito il piano a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali ($Oxy$) e indicato con $A$ il punto di massimo del grafico $G$ della funzione quando $a > 0$, scrivere l'equazione della circonferenza $\gamma$ di diametro $OA$.
3) Determinare quanti e quali punti hanno in comune la circonferenza $\gamma$ e la curva $G$, quando $a$ varia nell'insieme dei numeri reali positivi.
4) Calcolare il valore $\overline{a}$ di $a$ per il quale la circonferenza $\gamma$ e la curva $G$ hanno in comune i vertici di un triangolo equilatero.
5) Dopo aver controllato che il valore $\overline{a}$ sopraddetto è 4, indicare con $\overline{\gamma}$ e $\overline{G}$ la circonferenza e la curva corrispondenti a tale valore e calcolare le aree delle regioni piane in cui la curva $\overline{G}$ divide il cerchio delimitato da $\overline{\gamma}$.

## PROBLEMA 2

**1)** Una funzione $f(x)$ si definisce limitata nel suo insieme di definizione $A$ se esiste un numero reale positivo $M$ tale che $|f(x)| \leq M \ \forall x \in A$.

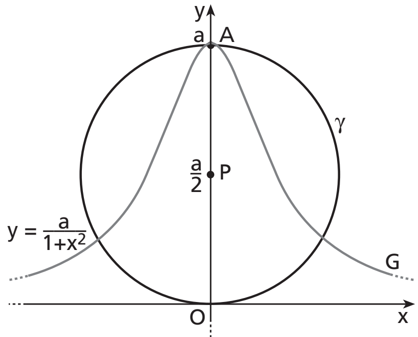
La funzione $f_a(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$ ha come campo di esistenza l'insieme dei numeri reali. Osservando che $1 + x^2 \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, si può scrivere $|f_a(x)| = \left|\dfrac{a}{1+x^2}\right| \leq |a|$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pertanto la funzione è limitata nel campo reale.

**2)** Si studia il grafico $G$ della funzione $f_a(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$, con $a$ positivo. Essa ha campo di esistenza $\mathbb{R}$; è simmetrica rispetto all'asse delle $y$ ed è sempre positiva; ha asintoto orizzontale $y = 0$, poiché $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a}{1+x^2} = 0$; ha derivata $f'_a(x) = \dfrac{-2ax}{(1+x^2)^2}$, pertanto ha massimo assoluto nel punto $A(0;\ a)$; ha derivata seconda $f''_a(x) = \dfrac{-2a(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}$, dunque ha flessi nei punti $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

La circonferenza di diametro $OA$ ha centro nel punto $P\left(0;\ \dfrac{a}{2}\right)$ e raggio uguale ad $\dfrac{a}{2}$. La sua equazione è:

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \rightarrow x^2 + y^2 - ay = 0.$$

Nella figura 4 è rappresentato il grafico $G$ della funzione $f_a$ per un generico $a$ e il grafico $\gamma$ della circonferenza.




▲ **Figura 4.**

**3)** Per determinare le intersezioni delle curve $\gamma$ e $G$ bisogna risolvere il sistema delle loro equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - ay = 0 \\ y = \dfrac{a}{1+x^2} \end{cases}.$$

L'equazione risolvente è:

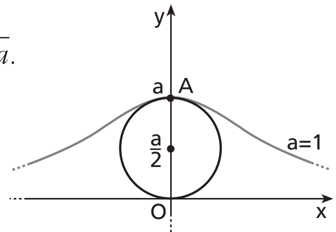
$$x^2 + \frac{a^2}{(1+x^2)^2} - \frac{a^2}{1+x^2} = 0 \rightarrow x^2(1+x^2)^2 + a^2 - a^2(1+x^2) = 0 \rightarrow x^2(1+x^2)^2 - a^2x^2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2(x^4 + 2x^2 - a^2 + 1) = 0.$$

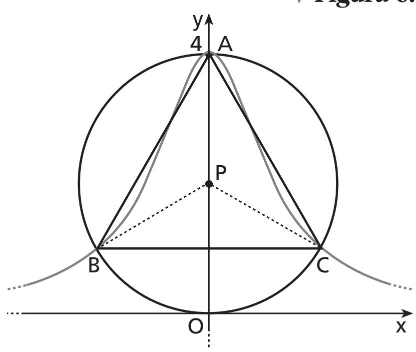
Per la legge di annullamento del prodotto: $x^2 = 0 \vee x^2 = -1 \pm a$.
Tenendo conto che $a$ è positivo, le soluzioni sono: $x = 0 \vee x = \pm\sqrt{-1+a}$.
In particolare,

se $a > 1$, le curve si intersecano in tre punti: $(0;\ a)$, $(-\sqrt{a-1};\ 1)$, $(\sqrt{a-1};\ 1)$;
se $a \leq 1$, le curve hanno solo il punto $(0;\ 1)$ in comune.

La figura 4 mostra dunque il caso in cui $a > 1$, mentre la figura 5 rappresenta le due curve per $a = 1$.



▲ **Figura 5.**



▼ **Figura 6.**

**4)** Indicati con $A$, $B$, $C$ i punti di intersezione delle due curve (figura 6), le loro coordinate sono: $A(0;\ a)$, $B(-\sqrt{a-1};\ 1)$, $C(\sqrt{a-1};\ 1)$, con $a > 1$.
Sfruttando la simmetria della figura, affinché il triangolo $ABC$ sia equilatero, è sufficiente imporre $\overline{AC} = \overline{BC}$:

$$\sqrt{(\sqrt{a-1})^2 + (1-a)^2} = 2\sqrt{a-1} \rightarrow \sqrt{a-1+1+a^2-2a} =$$
$$= 2\sqrt{a-1} \rightarrow \sqrt{a^2-a} = 2\sqrt{a-1}.$$

Elevando al quadrato e semplificando per $(a-1)$ si ottiene $a = 4$.

**5)** Per $a = 4$, i punti $A$, $B$, $C$ hanno coordinate $A(0;\ 4)$, $B(-\sqrt{3};\ 1)$, $C(\sqrt{3};\ 1)$. Osservando la figura 6, la curva $\overline{G}$ divide il cerchio delimitato da $\overline{\gamma}$ in tre parti, di cui due uguali per simmetria. Per determinare l'area della regione mistilinea $ACOB$, è sufficiente calcolare l'area della superficie compresa tra la curva $\overline{G}$ e il segmento $BC$ e sommare a essa l'area del segmento circolare $OBC$. Mentre il primo addendo si determina con un calcolo integrale, l'area del segmento circolare si trova per differenza tra il settore circolare $BPCO$ di angolo $B\hat{P}C = 120°$ e il triangolo $PBC$. Pertanto risulta:

$$S_{ACOB} = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left( \frac{4}{1+x^2} - 1 \right) dx + \left[ \frac{120}{360}\pi(2)^2 - \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}(2-1) \right] =$$
$$= [4 \operatorname{arctg} x - x]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} + \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} = \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} = 4\pi - 3\sqrt{3}.$$

L'area $S$ di ciascuna delle due restanti regioni, tra loro congruenti, comprese tra la curva $\overline{G}$ e gli archi inferiori $AB$ e $AC$, si ottiene come metà della differenza tra l'area della circonferenza $\overline{\gamma}$ e l'area $S_{ACOB}$:

$$S = \frac{\pi(2)^2 - (4\pi - 3\sqrt{3})}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$